# 中 国 科 学 技 术 大 学

## 2021—2022学年第二学期期中考试试卷

考试科目 数理统计 得分 _____

姓名 _____ 学号 _____

考试时间: 2022年4月16日下午3:30—5:00

装……订……线……

**一.** (10分) 设从正态总体$N(a,\sigma^2)$中抽取一组容量为$n$的样本$X_1,\ldots,X_n$, 这里$a>0,\sigma^2>0$为未知参数. 试

(1) 将样本密度函数表示为指数族分布的自然形式, 并指出自然参数空间以及充分完备统计量.

(2) 求总体变异系数$\theta=\sigma/a$的最大似然估计量$\hat{\theta}_n$, 其是否为$\theta$的相合估计?

**二.** (15分) 设从总体

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\theta/2$ | $\theta$ | $3\theta/2$ | $1-3\theta$ |

(其中$0<\theta<1/3$) 中抽取的一个简单样本$X_1,\ldots,X_n$, 试

(1) 求$\theta$的矩估计量$\hat{\theta}_M$和最大似然估计量$\hat{\theta}_L$, 并求出估计值.

(2) 上述估计量是否为无偏的? 若不是, 请作修正.

(3) 比较修正后的两个估计量, 指出那个更有效.

**三.** (30分) 设总体$X$的密度为

$$f(x)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1;\\ 1-\theta, & 1\le x<2;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中$0<\theta<1$为未知参数。现从此总体中抽出一样本量为$n$的样本$X_1,\ldots,X_n$. 试

(1) 求参数$\theta$的充分统计量. 其是否为最小充分统计量? 是否为完备统计量?

(2) 求$\theta$的极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$ 和矩估计量 $\tilde{\theta}_M$;

(3) 证明$\hat{\theta}_L$为$\theta$的最小方差无偏估计(UMVUE), 而$\tilde{\theta}_M$不是.

**四.** (30分) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自0-1分布$B(1,p),0<p<1$的一组简单样本. 试

(1) 将样本密度函数表示为指数族自然形式, 指出自然参数$\theta$及自然参数空间$\Theta$.

(2) 证明$\theta$不存在无偏估计.

(3) 求$\theta$的最大似然估计量, 并证明其具有渐近正态性.

(4) 求$g(p)=p(1-p)$的最小方差无偏估计$\hat{g}$, 其方差是否达到C-R不等式下界?

(5) 若$p\neq 1/2$, 求$g(p)$的一个渐近95%水平置信区间.

**五.** (15分) 设$X\sim U(\theta,\theta+1)$, 其中$\theta\in\mathbb{R}$为未知参数. 试

(1) 证明$X$是充分但不完备的统计量.

(2) 证明$\theta$有无偏估计但不存在UMVUE.

**六.** 试写出下述统计术语的中文名称(写对不得分, 写错一个扣0.5分):

(1) Population (2) Sufficient Statistic (3) Sampling distribution (4) Exponential family (5) Relative efficiency (6) Consistent estimator (7) Asymptotic normality (8) Confidence level (9) Likelihood function (10) Mean square error